OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a XII-a

1. Fie funcția $f:Z_9\to Z_9$, $f(x)=x^2$. Să se determine submulțimile nevide A ale mulțimii Z_9 cu proprietatea $f(A)=A$.

GM 9/2014

2. Pe R se consideră legea de compoziție $x*y=2015xy-2014x-2014y+2014$, $x,y\in R$.

a) Să se arate că $*$ este asociativă;

b) Să se afle $\alpha\in R$ astfel încât $x*x\geq\alpha$, pentru orice $x\in R$;

c) Să se calculeze $\frac{1}{2015}*\frac{2}{2015}*...*\frac{2015}{2015}$.

3. Fie $f:R\to R$ o funcție care admite o primitivă neinjectivă. Să se arate că există $a,b\in R$ $a\neq b$ astfel încât $f(a)+2f(b)=0$.

4. Să se calculeze $\int\frac{\sin x}{e^x+\sin x+\cos x}dx$, $x\in(0,+\infty)$.

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.